Technique de la réduite de Jordan

Partie I : Quelques mots sur la Trigonalisation

- Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E sur un corps K est trigonalisable si il existe une base sur laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure. Une matrice carrée A de taille n est dîte trigonalisable quand il existe une matrice triangulaire supérieure T et P inversible telle que :

  $$T = P^{-1} \times A \times P$$

- Propriété immédiate : Si A est diagonalisable alors Diag (T) est formée des valeurs propres de A.
- CNS de Trigonalisation :

  Une matrice carrée à coeffs réels ou complexes est trigonalisable sur K$= C$.
  Une matrice à coeffs réels est trigonalisable sur les réels SSI les racines de son polynôme caractéristique sont réelles.

Partie II : Méthode de la réduite de Jordan

Toute matrice carrée non diagonalisable est semblable à une matrice triangulaire supérieure T particulièrement simple, dîte de Jordan de la forme suivante :

i) Tous les coeffs ne se trouvant ni sur la diagonale de T, ni sur la diagonale d'au dessus sont nuls.

ii) Sur la diagonale on écrit les valeurs propres inscrites autant de fois que l'ordre de multiplicité

iii) Sur la diagonale juste au dessus on a des 0 et des 1. Les 0 se mettent dans les colonnes des valeurs propres. On met des 1 ailleurs.

Exemple en dimension 3 : Une valeur propre simple a et une valeur propre double b telle que l'espace propre associé à la valeur propre de b soit de dimension 1.

T est de la forme : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

Partie III : 2 exemples d'application de la technique de Trigonalisation via Jordan.

a) Exemple en dimension 2

Il s'agit d'étudier la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Le calcul des valeurs propres nous fournit la valeur propre réelle double : 2

L'espace propre associé à la valeur propre 2 est : $E_2 = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$ de dimension 1 alors que l'ordre de multiplicité est 2. A n'est pas diagonalisable, mais est trigonalisable dans l'ensemble des réels. Cherchons une allure de Jordan de la forme :

$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. V1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On cherche $L = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que : $A \times \mathrm{L} = \mathrm{V1} + 2\mathrm{L}$ et tel que L et V1 forment une famille libre du plan.

L doit vérifier : (A - 2Id) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Cad : $\begin{pmatrix} x - y \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ cad : x – y = 1

Prendre par exemple : x = 2 et y = 1

La famille V1 et L est libre.

On a alors la formule : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) Exemple en dimension 3

Il s'agit d'étudier la matrice : B= $\begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{matrix}$

Etude des valeurs propres : 1 qui est une valeur propre simple et -1 une valeur propre double.

L'espace propre associé à la valeur propre 1 est Vect $\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$ qui est de dimension 1. Prenons V1 comme vecteur directeur choisit.

L'espace propre associé à la valeur propre -1 est Vect $\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$ qui est de dimension 1 alors que l'ordre de multiplicité de -1 est 2. Donc B n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable dans les réels. On prend V2.

L'allure de Jordan est de la forme $T = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$

Il faut trouver un vecteur L tel que : $A \times L = 1V1 - L$ de telle sorte que V1 ; V2 et L soit une famille libre.

On a alors : $\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix} \times \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$ ce qui conduit au système : $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Prendre par exemple : x= 2 ; y=1 et z=1 cad prendre L= $\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$

On crée la matrice $\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$ pour P (par exemple, mais c'est loin d'être la seule matrice de passage possible)